15/6/2020 المحاضرة السابعة

دالة غاما تعريف: ليكن p عدد حقيقي موجب عندها نعرف دالة غاما للعدد p بأنها

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

Examples: $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$, $\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx$

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5\Gamma(5)}{2\Gamma(3)} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\,\Gamma(3)}{2\Gamma(3)} = 30$$

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(4) = 3.2.1\,\Gamma(1) = 6$$

ملاحظة:

$$\boxed{L[x^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad \text{حيث } s>0 \text{ و } n>-1}$$

البرهان غير مطلوب

$$L[x^n] = \int_0^{\infty} x^n e^{-sx} \, dx$$

$$=$$

/ /

تغيير المتحول:

$$\text{نعوض} \Leftarrow \begin{cases} sx = t \Rightarrow s\,dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = +\infty \Rightarrow t = \infty \;;\; s > 0 \end{cases}$$

$$L[x^n] = \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty t^{n+1-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) \;;\; n > -1$$

أمثلة: ① احسب $L[1]$:

$$L[1] = L[x^0]$$

$$= \frac{\Gamma(0+1)}{s^{0+1}} = \frac{1}{s}$$

② احسب $L[x]$

$$L[x] = \frac{\Gamma(2)}{s^2} = \frac{1\,\Gamma(1)}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

③ احسب :

$$L[x^2],\; L\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right],\; L[3],\; L[\sqrt{x}]$$

$$L[x^2] = \frac{\Gamma(2+1)}{s^3} = \frac{2.1\,\Gamma(1)}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = L\left[x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{(-\frac{1}{2}+1)}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$\Gamma[3] = 2.1.\Gamma(1) = 2$$

$$\Gamma(3) =$$

$L[\sqrt{x}] = L[x^{\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}$

خواص تحويلات لابلاس:

1) الخاصة الخطية: ليكن f و g دوال معرفة على R^+ وليكن α, β أعداد حقيقية ثابتة

$$L[\alpha . f(x) + \beta . g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)]$$

مثال:

$$L[3x^2 - 5x + 13] = 3L[x^2] - 5L[x] + 13L[1]$$

"الخاصة الخطية "الانسى ذكرها"

$$= 3\frac{2}{s^3} - 5\frac{1}{s^2} + 13\frac{1}{s}$$

2) خاصة الإزاحة الثابتة:

ليكن f(x) دالة تحويل لابلاس

$$L[f(x)] = F(s)$$

$$\boxed{L[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$$ عندها

a ثابت

$$L[x] = \frac{1}{s^2}$$

$$L[(6x)] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(s/6)^2}\right) = \frac{1}{\cancel{6}}\frac{\cancel{36}^{6}}{s^2} = \frac{6}{s^2}$$

قوانين الحفظ:

$$\boxed{\begin{aligned} L[\cos \alpha x] &= \frac{s}{s^2+a^2} \\ L[\sin \alpha x] &= \frac{\alpha}{s^2+a^2} \end{aligned}}$$

The End.

22/6/2020 المحاضرة الثامنة

مراجعة خواص لابلاس

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} \, dx$$

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

$$L[f(x)] = F(s)$$

$$L[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

نتابع في خواص التحويلات

1) خاصية المشتقة

إذا كان $L[f(x)] = F(s)$ فإن

$$L[f'(x)] = s L[f(x)] - f(0)$$

مثال: إذا علمت أن $L[\sin 2x] = \frac{2}{s^2+4}$

فأوجد $L[\cos 2x]$ باستخدام خاصية المشتقة

الحل:

$$L[\overbrace{\sin 2x}^{f(x)}] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L[f'] = L[2\cos 2x] \overset{\text{خاصية المشتقة}}{=} s\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \sin 2(0)$$

$$2L[\cos 2x] = \frac{2s}{s^2+4} - 0$$

$$\boxed{L[\cos 2x] = \frac{s}{s^2+4}}$$

مثال (وظيفة) إذا علمت أن $L[\cos 3x] = \frac{s}{s^2+9}$

فأوجد باستخدام خاصية المشتقة $L[\sin 3x]$